95 - MATH. I

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1995

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE
OPTIONS M ET P'

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES I. L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des options M et P', comporte 4 pages.

Ce problème est consacré à l'étude de suites complexes périodiques. Par définition, une suite complexe $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique si et seulement s'il existe un entier naturel p , différent de 0, tel que, pour tout entier naturel n , l'égalité

$$u_{n+p} = u_n$$

a lieu. L'entier p est appelé période de la suite U . Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble de ces suites.

La première et la deuxième partie définissent les applications linéaires L , D , θ , S et les sous-espaces vectoriels $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ de l'espace vectoriel $\mathcal{P}$. Elles étudient les noyaux et les espaces images de ces applications. La troisième partie s'intéresse à leur continuité.

Première partie.

Désignons par $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites complexes $V = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornées. Admettons que $\mathcal{B}$ soit un espace vectoriel complexe et que l'application de $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{R}$, $V \mapsto \|V\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |v_n|$, soit une norme.

I-1°) Premières propriétés de l'ensemble $\mathcal{P}$ des suites complexes périodiques :

- a. Désignons par $\mathcal{T}(U)$ l'ensemble des périodes d'une suite complexe périodique U . Démontrer l'existence d'une plus petite période p_0 ; caractériser l'ensemble $\mathcal{T}(U)$. Déterminer les ensembles $\mathcal{T}(\Omega)$ et $\mathcal{T}(C)$ relatifs aux deux suites définies ci-dessous :

$$\Omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}, \text{ pour tout } n, \omega_n = 1 ; C = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}, \text{ pour tout } n, c_n = \operatorname{Re}(i^{n+1}).$$

- b. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des suites complexes périodiques est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{B}$.
- c. Cet espace vectoriel $\mathcal{P}$ est-il de dimension finie ?

Étant donné une suite U de $\mathcal{P}$ et deux entiers naturels p et n , désignons par $A(U,p,n)$ le nombre complexe défini par la relation :

$$A(U,p,n) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} u_{n+k} .$$

I-2°) Décomposition de $\mathcal{P}$ en somme directe.

- a. Démontrer que pour une suite U donnée de $\mathcal{P}$, le nombre complexe $A(U,p,n)$ ne dépend ni de l'entier naturel n , ni de la période p de U (p appartient à $\mathcal{T}(U)$).

Pour une suite U donnée de $\mathcal{P}$, soit $L(U)$ la valeur commune de ces nombres complexes $A(U,p,n)$; désignons par L la forme linéaire : $U \mapsto L(U)$.

- b. Calculer $L(\Omega)$ et $L(C)$; Ω et C sont les suites définies à la question I-1°a.
- c. Soit $\mathcal{P}_0$ le noyau de la forme linéaire L . Soit $\mathcal{P}_1$ le sous-espace vectoriel engendré par la suite Ω définie à la question I-1°a; démontrer que l'espace vectoriel $\mathcal{P}$ est égal à la somme directe des deux sous-espaces vectoriels $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$: $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{P}_1$.

I-3°) Étude d'un endomorphisme D_0 de $\mathcal{P}_0$.

À tout élément $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}$, associons la suite $U' = (u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par la relation :

pour tout entier naturel n , $u'_n = u_{n+1} - u_n$.

- a. Démontrer que, pour tout U de $\mathcal{P}$, la suite U' appartient à $\mathcal{P}$. Soit D l'application : $U \mapsto U'$; établir que D est un endomorphisme de $\mathcal{P}$. Déterminer les images $D(\Omega)$ et $D(C)$ des suites définies à la question I-1°a. Quels sont le noyau et l'espace image de l'endomorphisme D ?
- b. Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_0$ est stable par D et que la restriction de D à $\mathcal{P}_0$ est un automorphisme, qui est noté D_0 .
- c. Déterminer toutes les valeurs propres de cet automorphisme D_0 de $\mathcal{P}_0$; préciser des éléments de $\mathcal{P}_0$ qui sont des vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

I-4°) Étude d'une application linéaire de $\mathcal{P}_0$ dans $\mathcal{P}$.

À tout élément $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}$, associons la suite $U^* = (u_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par la relation :

pour tout entier naturel n , $u_n^* = \sum_{k=0}^n u_k$.

- a. Démontrer que l'application $\theta : U \mapsto U^*$ est une application linéaire de $\mathcal{P}_0$ dans $\mathcal{P}$.
- b. Déterminer le noyau et l'espace image de cette application linéaire θ .

Deuxième partie

Soient $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de $\mathcal{P}$ et α un réel supérieur ou égal à 1. L'objet de cette partie est d'étudier la série de terme général $v_n = \frac{u_n}{n^\alpha}$, $n \geq 1$, et de considérer la forme linéaire S qui, à un

élément U de $\mathcal{P}_0$, associe le nombre complexe $S(U)$ défini par la relation :
$$S(U) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$$

II-1°) Soient $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de $\mathcal{P}$ et α un réel strictement supérieur à 1.

Quelle est la nature de la série de terme général u_n , $n \in \mathbb{N}$? Quelle est celle de la série de terme général $v_n = \frac{u_n}{n^\alpha}$, $n \geq 1$?

II-2°) Soit $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de $\mathcal{P}$ de période p ; supposons le réel α égal à 1 ; pour étudier la convergence de la série de terme général $v_n = \frac{u_n}{n}$, $n \geq 1$, considérons les nombres complexes w_k , $k \geq 1$, définis par la relation :

$$w_k = v_{kp} + v_{kp+1} + \dots + v_{kp+p-1} = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{u_j}{kp+j}.$$

- En supposant les deux entiers p et j donnés ($p > 0$, $j \geq 0$), déterminer le développement limité à l'ordre 2 par rapport à $\frac{1}{k}$ de l'expression $\frac{1}{kp+j}$, lorsque l'entier k croît indéfiniment.
- En déduire la nature de la série de terme général w_k , $k \geq 1$, lorsque la suite U appartient à $\mathcal{P}$ sans appartenir à $\mathcal{P}_0$ puis, lorsque la suite U appartient à $\mathcal{P}_0$.
- En déduire la nature de la série de terme général v_n , $n \geq 1$; discuter sa convergence suivant que la suite U appartient ou non à l'ensemble $\mathcal{P}_0$.

Désormais, désignons par S la forme linéaire qui, à une suite U appartenant à $\mathcal{P}_0$, fait correspondre le réel $S(U) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$.

II-3°) Deux exemples :

- Soit $C = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie à la question I-1° a. Calculer $S(C)$. Une méthode, parmi d'autres, consiste à utiliser la relation : pour tout entier naturel k , $\int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$.
- Soit $T = (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de période p , dont les termes t_n , $n \in \mathbb{N}$, sont définis par les relations : pour tout entier r compris entre 1 et $p-1$, $1 \leq r \leq p-1$, $t_r = 1$; $t_p = 1-p$.

Déterminer $S(T)$ en supposant connu le résultat : il existe une constante γ telle que :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o(1), \text{ lorsque l'entier } n \text{ croît indéfiniment.}$$

Troisième partie

D'après les résultats admis et la question I-1° b, le couple $(\mathcal{P}, \|U\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé. Le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_0$ de $\mathcal{P}$ est muni de la même norme. L'objet de cette partie est d'étudier la continuité des applications linéaires L, D, θ et S. Rappelons que, si T est une application lipschitzienne d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ dans un espace vectoriel normé $(F, \|\cdot\|_F)$, sa norme est définie par la relation :

$$\|T\| = \sup_{x \in E} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} .$$

- III-1°) Démontrer que la forme linéaire L est lipschitzienne. Déterminer sa norme. Le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_0$ est-il fermé dans $\mathcal{P}$?
- III-2°) Cette application linéaire D de $\mathcal{P}$ dans lui-même est-elle lipschitzienne ? Déterminer éventuellement sa norme.
- III-3°) L'application linéaire θ de $\mathcal{P}_0$ dans $\mathcal{P}$ est-elle lipschitzienne ?
- III-4°) Étude de la continuité de la forme linéaire S :

Dans cette question, q est un entier donné strictement positif.

a. Soit I_q l'intégrale définie par la relation :

$$I_q = \int_0^1 \frac{1-t^q}{(1-t)(1+t^q)} dt .$$

Étudier la définition de l'intégrale I_q et la convergence de la suite réelle $(I_q)_{q \geq 1}$ lorsque l'entier q croît indéfiniment.

- b. Soit $Z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite appartenant à $\mathcal{P}$, de période 2q dont les termes $z_n, n \in \mathbb{N}$, sont définis par les relations :

$$\text{pour tout entier } n \text{ compris entre } 1 \text{ et } q : 1 \leq n \leq q, z_n = 1 ,$$

$$\text{pour tout entier } n \text{ compris entre } q+1 \text{ et } 2q : q+1 \leq n \leq 2q, z_n = -1 .$$

Étant donné un entier N strictement positif, soit V_N le réel défini par la relation

$$V_N = \sum_{n=1}^{2qN} \frac{z_n}{n} .$$

Étudier la convergence de la suite réelle $(V_N)_{N \geq 1}$.

- c. Dédurre des résultats précédents que la forme linéaire S définie sur $\mathcal{P}_0$, n'est pas lipschitzienne.